

# Propriétés des opérations et calcul mental

## Trame de construction de séquences


Des séquences toutes construites sur le même modèle :

1. Manipulation
  - ↳ Les élèves utilisent la balance et des cubes.
2. Schématisation
  - ↳ Les élèves raisonnent à partir de balances schématisées.
  - ↳ Les manipulations précédemment réalisées sont simplement évoquées.
3. Formalisation
  - ↳ On introduit les signes, on établit les écritures.
4. Application
  - ↳ Les élèves s'entraînent, soit à partir de schémas, soit à partir des écritures symboliques.
  - ↳ Si nécessaire, utiliser la balance pour faire corriger les erreurs des élèves.

### Séquence 1 : Compréhension des signes =, ≠, + et – à l'aide d'un outil, la balance

Séances de 30 min, 2 fois / semaine.

Matériel : balances de Roberval, cubes de différentes couleurs, schémas des trois positions possibles de la balance (cartes de bristol plastifiées), feutres effaçables à sec.

 Afin de neutraliser l'effet de la masse lors de l'utilisation d'une balance de Roberval, les objets utilisés (cubes) auront tous la même masse. Cela permettra de raisonner sur les quantités.

Progressivité :

- ✓ CP : Nombres jusqu'à 10
- ✓ CE1 : Nombres jusqu'à 20
- ✓ CE2 : Nombres jusqu'à 50
- ✓ CM1/CM2 : Nombres jusqu'à 100

Séance	Mise en œuvre	Notion abordée	Test à l'issue de la séance
Séance 1	Manipulation	Autant / Plus / Moins	
Séance 2	Schématisation – Application	Autant / Plus / Moins	Test
Séance 3	Formalisation – Application	Introduction des signes = et ≠	Test
Séance 4	Manipulation – Schématisation – Formalisation – Application	Introduction du signe + : composition, décomposition	
Séance 5	Manipulation – Schématisation – Formalisation – Application	Le signe + : composition, décomposition avec 3 nombres ou plus	
Séance 6	Manipulation – Schématisation – Formalisation – Application	Le signe + : composition, décomposition, équivalences	Test
Séance 7 et 8	Manipulation – Schématisation – Application	Les signes + et – : ajout et retrait	Test après la séance 8
Séances 9 et 10	Application	Entraînement sur les écritures symboliques	Test après la séance 10

En cas d'échec au test pour certains élèves, reprendre avec eux la (les) séance(s) le précédant, en repassant par la manipulation, avant de passer à la séance suivante.

## Séance 1

### Autant / Plus / Moins : observation perceptuelle de la balance (vision)

#### ✓ Découverte de la balance

Faire décrire la balance de Roberval : deux plateaux, un fléau.

Faire observer que lorsque la balance est vide : horizontalité des deux plateaux et position verticale du fléau. Dans ce cas, on dit que la balance est à l'équilibre.

Faire mettre des objets (cubes, par exemple) sur l'un des plateaux et faire décrire aux élèves ce qu'ils constatent. Parvenir à la conclusion suivante : le plateau qui contient des objets est plus bas que celui qui n'en contient pas ; le fléau penche du côté du plateau contenant des objets.

Répéter la même opération en faisant poser des objets sur l'autre plateau et parvenir au même constat.

#### ✓ Notion de autant (= même quantité)

Faire constater que lorsque l'on place 3 cubes (utiliser des cubes de couleurs différentes) sur chacun des deux plateaux, la balance est à l'équilibre.

Faire verbaliser qu'il y a la même quantité de cubes sur le plateau de gauche et sur celui de droite.

Introduire le mot « **autant** » (autant = même quantité).

Répéter l'activité en variant les quantités et les couleurs des cubes.

Dans cette phase découverte, il est inutile, y compris pour les CM1-CM2, de dépasser 10 cubes sur chaque plateau.

#### ✓ Notion de plus / moins

Partir des deux plateaux à l'équilibre (par exemple : 3 cubes sur chaque plateau) et faire enlever un cube.

Faire constater l'effet sur la balance. Faire le lien avec les quantités présentes sur chaque plateau.

- ✓ Le fléau penche toujours vers le plateau qui contient le plus d'objets.
- ✓ Le plateau contenant **le plus** de cubes, c'est-à-dire la quantité la plus importante, est celui qui est le plus bas. A l'inverse, le plateau contenant **le moins** de cubes, c'est-à-dire la quantité la moins importante, est celui qui est le plus haut.



*Attention : cette relation est contre intuitive. Veiller à bien attirer l'attention des élèves sur ce fait.*

Reproduire l'activité avec une quantité de cubes de départ différente (par exemple : 5 cubes sur chaque plateau).

Reprendre la situation, cette fois-ci en ajoutant un cube sur l'un des plateaux. Suivre le même déroulement que précédemment.

✓ **Notion de autant / plus / moins : soupesage à l'aide des mains**

Les élèves sont par deux.

L'un joue le rôle de la balance. Ses deux mains sont placées comme les plateaux d'une balance à l'équilibre, paumes tournées vers le ciel.

L'autre élève place des objets de même masse suffisamment pesants (boulets, gommes, tubes de colle...), en reprenant la progression de la situation précédente : quantité d'objets identique ; j'enlève un objet ; j'ajoute un objet.

Dans chacun des cas, faire constater l'effet sur la position des mains de l'élève jouant le rôle de la balance et la sensation ressentie par ce dernier.

**Séance 2**

**Autant / Plus / Moins : schématisation**

✓ **Plateaux en équilibre**

- Réaliser les schémas des trois positions possibles de la balance (cartes de bristol plastifiées) : un jeu par élève.
- Créer les différentes situations de l'application.
- Concevoir le test.

Proposer le schéma d'une balance à l'équilibre (voir ci-dessous).

\_\_\_\_\_

Demander aux élèves de reconnaître à quoi correspond ce schéma.

Les faire verbaliser que la balance est à l'équilibre en employant les termes utilisés dans la séance précédente : plateaux, fléau, équilibre.

Demander ensuite aux élèves de dessiner des cubes sur les plateaux.

Recueillir les différentes réponses et proposer une analyse collective de toutes les productions, y compris les erronées (reproduire ou afficher chacune au tableau).

Pour les réponses erronées, faire faire la manipulation avec la balance devant l'ensemble de la classe.

✓ **Plateaux en déséquilibre**

Suivre la même progression avec des plateaux en déséquilibre. Proposer les deux schématisations : plateau de gauche en bas, puis plateau de droite en bas (voir ci-dessous).

\_\_\_\_\_ et \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

✓ **Application**

Proposer les schémas des trois positions possibles de la balance (le schéma avec les plateaux en équilibre et les deux schémas ci-dessus pour les plateaux en déséquilibre) ainsi qu'une série de cubes (par exemple : 3 cubes sur le plateau de gauche et 5 cubes sur le plateau de droite).

Demander aux élèves d'associer la série de cubes au bon schéma.

Reprendre plusieurs fois la situation avec différentes séries de cubes.

4 cubes à gauche / 5 cubes à droite

2 cubes à gauche / 3 cubes à droite

2 cubes à gauche / 1 cube à droite

3 cubes à gauche / 3 cubes à droite

2 cubes à gauche / 4 cubes à droite

- Construire les 3 premières phases de la séance : manipulation, schématisation et formalisation.
- Créer les différentes situations de l'application.
- Concevoir le test.

### Séance 3

#### Introduction des signes = et ≠

- ✓ **Objectif** : parvenir à l'écriture de  $3 = 3$  ;  $3 \neq 2$

Reprise rapide du travail réalisé en séance 1 avec introduction des signes = et ≠. Faire remarquer aux élèves que le signe ≠ est le signe = qui est barré.

↳ Manipulation, puis schématisation et enfin formalisation (production d'une écriture utilisant les symboles). Veiller à faire verbaliser les élèves durant chacune de ces phases.

- ✓ **Manipulation** (en binôme)

Laisser les élèves manipuler en leur demandant de créer des situations où sur la balance on peut voir que « c'est égal » ou « c'est différent ». L'enseignant passe auprès des groupes.

- ✓ **Schématisation**

Demander aux élèves de tracer le bon signe en fonction des schémas proposés :

Avec des cubes tracés sur les plateaux du schéma correspondant :

3 cubes / 4 cubes

2 cubes / 2 cubes

5 cubes / 5 cubes

3 cubes / 1 cube

Avec des nombres sur les plateaux du schéma correspondant :

3 / 3

4 / 2

3 / 6

4 / 4

✓ **Application**

Exercice 1 : Complète en faisant comme dans l'exemple : (les élèves écrivent le signe « ≠ » ou « = »)

3 / 2            3 ≠ 2

1 / 1            1 ..... 1

2 / 5            2 ..... 5

3 / 1            3 ..... 1

4 / 4            4 ..... 4

2 / 4            2 ..... 4

Exercice 2

Complète avec les signes « ≠ » ou « = »

3 ..... 2                            3 ..... 2                            5 ..... 5

5 ..... 3                            1 ..... 4                            4 ..... 6

5 ..... 4                            3 ..... 3                            1 ..... 2

- Créer les différentes situations pour chacune des phases de la séance : manipulation, schématisation, formalisation et application.

## Séance 4

### Introduction du signe + : composition, décomposition

#### ✓ Observation de la balance

Exemple : Balance à l'équilibre → Plateau de gauche : 2 cubes bleus et 3 cubes rouges / Plateau de droite : 5 cubes verts.

Parvenir à faire verbaliser que 2 et 3 font 5 ; que 2 et 3, c'est autant que 5.

Proposer d'autres situations de ce type en pensant à interchanger les plateaux de la balance.

#### ✓ Manipulation

##### ✓ Situation 1

Plateau de gauche : 4 cubes bleus et 2 cubes rouges / Plateau de droite : ? cubes verts pour que la balance soit à l'équilibre.

##### ✓ Situation 2

Plateau de gauche : 6 cubes bleus / Plateau de droite : ? cubes verts et ? cubes rouges pour que la balance soit à l'équilibre.

##### ✓ Situation 3

Plateau de gauche : 3 cubes bleus et 1 rouge

Plateau de droite : ? cubes verts

##### ✓ Situation 4

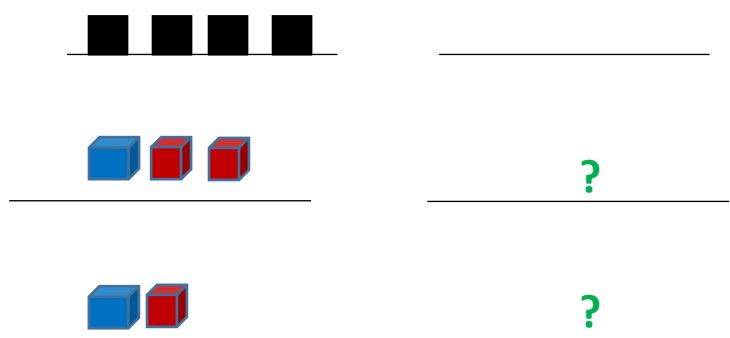
Plateau de gauche : ? cubes bleus

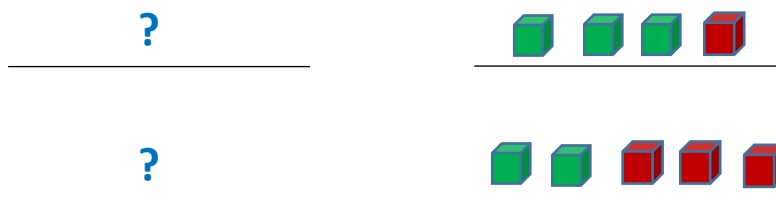
Plateau de droite : 2 cubes verts et 3 rouges

#### ✓ Schématisation

Demander aux élèves de dessiner les cubes manquants afin de schématiser les deux types de situation rencontrés dans la phase de manipulation.

Exemple : Dessiner des cubes rouges et des cubes jaunes sur le plateau de droite.






Recueillir les différentes réponses et proposer une analyse collective de toutes les productions, y compris les erronées (reproduire ou afficher chacune au tableau).

Pour les réponses erronées, faire faire la manipulation avec la balance devant l'ensemble de la classe.

### ✓ Formalisation

Introduction de l'écriture :  $4 = 1 + 3$  ;  $1 + 3 = 4$  ;  $4 = 3 + 1$  ;  $3 + 1 = 4$  ; etc.

 Veiller à bien faire produire toutes les égalités possibles et à ne pas oublier de « commuter » les écritures.

$$1 + 2 = 3$$

$$4 = 3 + 1$$

$$1 + 1 = 2$$

$$5 = 2 + 3$$

### ✓ Application

1. Compléter avec = ou  $\neq$

$4 \dots 2 + 2$

$3 + 2 \dots 6$

$3 \dots 2 + 1$

$2 + 2 \dots 5$

$1 + 3 \dots 5$

$2 + 4 \dots 5$

2. Compléter

$\dots + 2 = 5$

$5 \neq \dots + 2$

$6 \neq 4 + \dots$

$3 + 4 \neq \dots$

$1 + 3 = \dots$

$3 \neq \dots + 2$

$2 + 3 \neq \dots$

$4 = \dots + 2$

 Faire compléter des égalités, mais aussi des inégalités.

- Créer les différentes situations pour chacune des phases de la séance : manipulation, schématisation, formalisation et application.

## Séance 5

### Le signe + : composition, décomposition avec 3 nombres ou plus

#### ✓ Observation de la balance

Exemple : Balance à l'équilibre → Plateau de gauche : 2 cubes bleus, 2 cubes rouges et 1 jaune / Plateau de droite : 5 cubes verts.

Parvenir à faire verbaliser que 2 et 2 et 1 font 5 ; que 2 et 2 et 1, c'est autant que 5.

Proposer d'autres situations de ce type en pensant à interchanger les plateaux de la balance.

#### ✓ Manipulation

##### ✓ Situation 1

Plateau de gauche : 3 cubes bleus, 2 cubes rouges et 2 jaunes / Plateau de droite : ? cubes verts pour que la balance soit à l'équilibre.

##### ✓ Situation 2

Plateau de gauche : 6 cubes bleus / Plateau de droite : ? cubes verts et ? cubes rouges et ? cubes jaunes pour que la balance soit à l'équilibre.

##### ✓ Situation 3

Plateau de gauche : 5 cubes verts

Plateau de droite : ? cubes bleus et ? cubes rouges et ? cubes jaunes

##### ✓ Situation 4

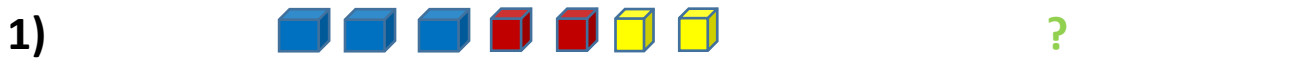
Plateau de gauche : 1 cube bleu, 2 rouges, 1 jaune

Plateau de droite : ? cubes verts

#### ✓ Schématisation

Demander aux élèves de dessiner les cubes manquants afin de schématiser les deux types de situation rencontrés dans la phase de manipulation.

Exemple : Dessiner des cubes rouges, des cubes jaunes et des cubes bleus sur le plateau de droite.





4)



?

Recueillir les différentes réponses et proposer une analyse collective de toutes les productions, y compris les erronées (reproduire ou afficher chacune au tableau).

Pour les réponses erronées, faire faire la manipulation avec la balance devant l'ensemble de la classe.

✓ **Formalisation**

Introduction de l'écriture :  $4 = 1 + 1 + 2$  ;  $1 + 1 + 2 = 4$  ;  $4 = 1 + 2 + 1$  ;  $1 + 2 + 1 = 4$  ;  $4 = 2 + 1 + 1$  ;  $2 + 1 + 1 = 4$ .

 *Veiller à bien faire produire toutes les écritures possibles.*

1)

$$3 + 2 + 2 = 7 \qquad 7 = 3 + 2 + 2$$

$$2 + 2 + 3 = 7 \qquad 7 = 2 + 2 + 3$$

$$2 + 3 + 2 = 7 \qquad 7 = 2 + 3 + 2$$

2)

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad 1 + 2 + 3 = 6$$

$$6 = 1 + 3 + 2 \qquad 1 + 3 + 2 = 6$$

$$6 = 2 + 3 + 1 \qquad 2 + 3 + 1 = 6$$

$$6 = 2 + 1 + 3 \qquad 2 + 1 + 3 = 6$$

$$6 = 3 + 2 + 1 \qquad 3 + 2 + 1 = 6$$

$$6 = 3 + 1 + 2 \qquad 3 + 1 + 2 = 6$$

$$6 = 4 + 1 + 1 \qquad 4 + 1 + 1 = 6$$

$$6 = 1 + 1 + 4 \qquad 1 + 1 + 4 = 6$$

$$6 = 1 + 4 + 1 \qquad 1 + 4 + 1 = 6$$

3)

$$5 = 1 + 1 + 3 \qquad 1 + 1 + 3 = 5$$

$$5 = 3 + 1 + 1 \qquad 3 + 1 + 1 = 5$$

$$5 = 1 + 3 + 1 \qquad 1 + 3 + 1 = 5$$

$$5 = 2 + 2 + 1 \qquad 2 + 2 + 1 = 5$$

$$5 = 1 + 2 + 2 \qquad 1 + 2 + 2 = 5$$

$$5 = 2 + 1 + 2 \qquad 2 + 1 + 2 = 5$$

4)

$$1 + 2 + 1 = 4 \qquad 1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 2 = 4 \qquad 1 + 1 + 2 = 4$$

$$2 + 1 + 1 = 4 \qquad 2 + 1 + 1 = 4$$

(Possibilité d'inverser les couleurs en gardant les nombres)

✓ **Application**

1. Compléter avec = ou ≠

$$4 \dots 2 + 2 + 1$$

$$2 + 2 + 1 \dots 5$$

$$3 + 1 + 1 \dots 4$$

$$5 \dots 1 + 2 + 3$$

$$3 \dots 1 + 1 + 2$$

2. Compléter

$$5 = 1 + 2 + \dots$$

$$3 + 2 + 2 = \dots$$

$$6 \neq 4 + \dots + 1$$

$$6 \neq 3 + 2 + \dots$$

$$3 = 1 + 1 + \dots$$

$$4 \neq 2 + 1 + \dots$$



*Faire compléter des égalités, mais aussi des inégalités.*

- Créer les différentes situations pour chacune des phases de la séance : manipulation, schématisation, formalisation et application.
- Concevoir le test.

## Séance 6

### Le signe + : composition, décomposition, équivalences

✓ **Observation de la balance**

Exemple : Balance à l'équilibre → Plateau de gauche : 2 cubes bleus, 2 cubes rouges / Plateau de droite : 3 cubes verts et 1 cube jaune.

Parvenir à faire verbaliser que 2 et 2 représentent la même quantité que 3 et 1 ; que 2 et 2, c'est autant que 3 et 1.

Plateau de gauche : 3 bleus, 2 rouges

Plateau de droite : 1 vert, 4 jaunes

Plateau de gauche : 4 bleus, 2 rouges

Plateau de droite : 3 verts, 3 jaunes

✓ **Manipulation**

Exemple → Plateau de gauche : 4 cubes bleus, 3 cubes rouges / Plateau de droite : ? cubes verts et ? cubes jaunes pour que la balance soit à l'équilibre.

Plateau de gauche : 2 bleus, 3 rouges

Plateau de droite : ? verts, ? jaunes

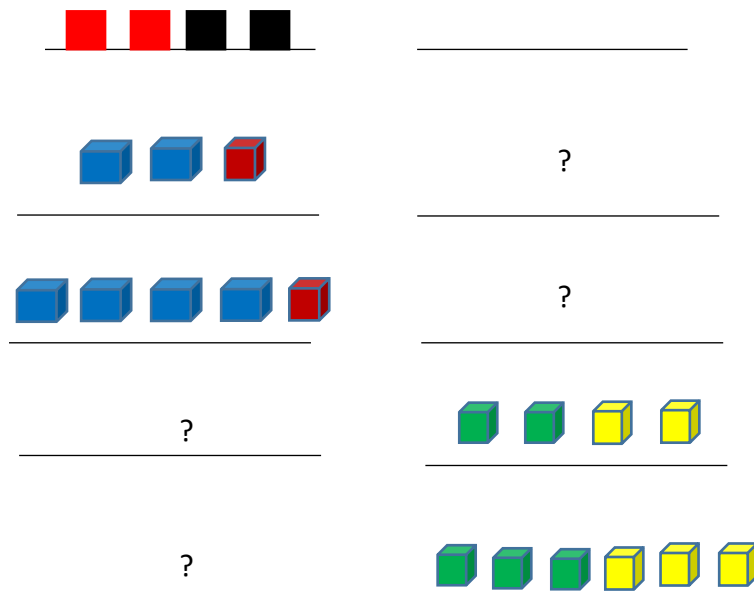
Plateau de gauche : 3 bleus, 1 rouge

Plateau de droite : ? verts, ? jaunes

### ✓ Schématisation

Demander aux élèves de dessiner les cubes manquants afin de schématiser des situations semblables à celles rencontrées dans les phases précédentes.

Exemple : Dessiner des cubes bleus et des cubes jaunes sur le plateau de droite.



Recueillir les différentes réponses et proposer une analyse collective de toutes les productions, y compris les erreurs (reproduire ou afficher chacune au tableau).

Pour les réponses erronées, faire faire la manipulation avec la balance devant l'ensemble de la classe.

### ✓ Formalisation

Introduction de l'écriture :  $2 + 2 = 3 + 1$  ;  $1 + 3 = 2 + 2$ .

$$2 + 1 = 1 + 2$$

$$1 + 2 = 2 + 1$$

$$4 + 1 = 3 + 2$$

$$2 + 3 = 1 + 4$$

$$1 + 3 = 2 + 2$$

$$2 + 2 = 2 + 2$$

$$3 + 1 = 2 + 2$$

$$1 + 5 = 3 + 3$$

$$3 + 3 = 3 + 3$$

$$3 + 3 = 5 + 1$$

$$5 + 1 = 3 + 3$$

$$4 + 2 = 3 + 3$$

Attention à bien faire produire toutes les égalités possibles.

## ✓ Application

### 1. Compléter avec = ou ≠

$3 + 1 \dots 2 + 2$	$2 + 4 \dots\dots 3 + 2$
$2 + 2 \dots 4 + 1$	$3 + 1 \dots\dots 4 + 2$
$3 + 1 \dots 1 + 3$	$1 + 4 \dots\dots 2 + 3$

### 2. Compléter

$2 + 3 = 4 + \dots$	$1 + 3 = \dots\dots + 2$
$\dots + 2 = 2 + 1$	$2 + \dots\dots \neq 3 + 1$
$4 + \dots \neq 2 + 3$	$\dots\dots + 1 \neq 4 + 2$



*Faire compléter des égalités, mais aussi des inégalités.*

## Séance 7

- Créer les différentes situations pour chacune des phases de la séance : manipulation, schématisation et application.

### Signes + et – : ajout et retrait

#### ✓ Manipulation

Situation de recherche : 5 cubes sur le plateau de gauche de la balance, 3 cubes sur le plateau de droite.

Comment équilibrer la balance ?

↳ Deux possibilités : on ajoute 2 cubes sur le plateau de droite **ou** on enlève 2 cubes sur le plateau de gauche.



*Bien faire remarquer que pour obtenir l'équilibre, enlever 2 à 5 ou ajouter 2 à 3 sont deux procédures équivalentes.*

#### ✓ Schématisation

Demander aux élèves de proposer une schématisation de la situation.

Exploiter toutes les productions des élèves, puis retenir celles traduisant la situation et faire remarquer qu'il faut ajouter des flèches pour traduire l'action d'ajout ( ✓ ) ou de retrait ( ↗ ).

#### ✓ Application

Exercices d'entraînement intégrant la schématisation précédemment rencontrée.

## Séance 8

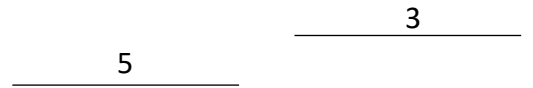
### Signes + et – : ajout et retrait (suite)

#### ✓ Schématisation

Reprise des situations schématisées de la séance 7, mais en remplaçant les cubes par des nombres.

Exemple : Comment équilibrer la balance ?


Schéma ci-contre à projeter ou à reproduire au tableau :



Faire prendre aux élèves le schéma de la balance à l'équilibre. Après avoir reporté les nombres en jeu sur ce dernier, les élèves doivent dessiner la flèche ajout ou retrait au niveau du bon plateau et indiquer au-dessus de celle-ci la quantité à ajouter ou enlever pour que la balance soit à l'équilibre.

#### ✓ Formalisation

Introduction de l'écriture :  $5 = 3 + 2$  ou  $5 - 2 = 3$ .

  $5 - 2 = 3$  et  $3 + 2 = 5$  met en évidence le concept d'opérations inverses.

*Cette propriété de l'addition et de la soustraction est très importante pour la construction du nombre, le fonctionnement de l'égalité et la résolution d'équation au cycle 4.*

#### ✓ Application

Exercices d'entraînement :

1. Avec les schémas.

2. Sans schéma

✓ D'abord de type :  $5 \dots 3 = 2$ .

✓ Puis de type :  $5 = 2 \dots$  ;  $3 \dots = 5$  ;  $5 \dots = 2$ .

- Créer les différents exercices d'entraînement.

- Concevoir le test à faire réaliser à l'issue de la séance 10.

## Séances 9 et 10

### Entraînement sur les écritures symboliques

A partir de l'égalité  $a = b + c$ , on peut faire compléter l'ensemble des items suivants :

$$b + c = ? ; ? = b + c$$

$$b + ? = a ; a = b + ?$$

$$? + c = a ; a = ? + c$$

Si  $a = b + c$ , alors on a les deux écritures soustractives suivantes :  $c = a - b$  et  $b = a - c$ .

On peut donc faire compléter les items suivants :

$$a - b = ? ; ? = a - b$$

$$a - c = ? ; ? = a - c$$

$$? - b = c ; c = ? - b$$

$$? - c = b ; b = ? - c$$

$$a - ? = c ; c = a - ?$$

$$a - ? = b ; b = a - ?$$

Même démarche à partir de l'égalité  $a = b + c + d$ .

$$b + c + d = ? ; ? = b + c + d$$

$$b + c + ? = a ; a = b + c + ?$$

$$b + ? + d = a ; a = b + ? + d$$

Etc...

Même démarche à partir de l'égalité  $a + b = c + d$ .

$$a + b = c + ? ; c + ? = a + b$$

$$? + b = c + d ; c + d = ? + b$$

Etc...



*Veiller à ce que chaque séance comporte tous les types d'items.*



*A partir de la séance 7, veiller à proposer autant de situations additives que soustractives.*

Pour les CM, prévoir le protocole sur 4 ou 5 séances au lieu des dix présentées.

En guise de prolongement, on peut ensuite construire une séquence, sur le même modèle, pour la commutativité, l'inversion et enfin l'associativité, d'abord des écritures additives puis, pour les CM, des écritures multiplicatives.